CÁLCULO L1 — NOTAS DA SEXTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula definiremos as demais funções trigonométricas, que são obtidas a partir das funções seno e cosseno, e determinaremos suas derivadas.

1. As funções tangente e secante

As expressões para as funções tangente e secante são

$$\operatorname{tg} X = \frac{\operatorname{sen} X}{\cos X}$$
$$\sec X = \frac{1}{\cos X}$$

Estas expressões não estão definidas para todos os valores de X para os quais $\cos X = 0$. Isto ocorre quando $X = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, as funções tangente e secante possuem o mesmo domínio que é

$$\left\{X \in \mathbb{R} : X - \frac{\pi}{2} \text{ não é múltiplo inteiro de } \pi\right\}$$

Dividindo a seguinte identidade fundametal

$$\operatorname{sen}^2 X + \cos^2 X = 1$$

que foi estabelecida na aula anterior, por $\cos^2 X$ obtemos

$$\left(\frac{\operatorname{sen} X}{\cos X}\right)^2 + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 X + \cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{1}{\cos^2 X} = \left(\frac{1}{\cos X}\right)^2$$

Isto é,

$$\operatorname{tg}^2 X + 1 = \sec^2 X \tag{1}$$

que é a identidade fundamental envolvendo as funções tangente e secante.

Existe uma identidade para a tangente da soma de dois ângulos que estabeleceremos a seguir. Utilizando a expressão para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos, obtemos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha\cos\beta$, temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

Conseqüentemente

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{2}$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Esta expressão só faz sentido quando $\cos\alpha, \cos\beta$ e $\cos(\alpha+\beta)$ são todos não nulos. Isto é, nenhum dos ângulos α, β e $\alpha+\beta$ é da forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Este fato foi utilizado livremente neste parágrafo.

Fazendo $\alpha = \pi$ em (2), chegamos à

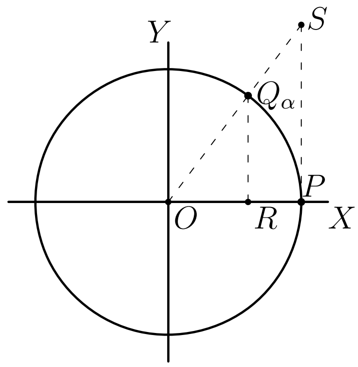
$$\operatorname{tg}(\pi+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\pi + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\pi\operatorname{tg}\beta} = \frac{0 + \operatorname{tg}\beta}{1 - 0\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\beta$$

Conseqüentemente π é um múltiplo inteiro do período da função tangente. Ao fazermos o gráfico desta função, veremos que π é o seu período.

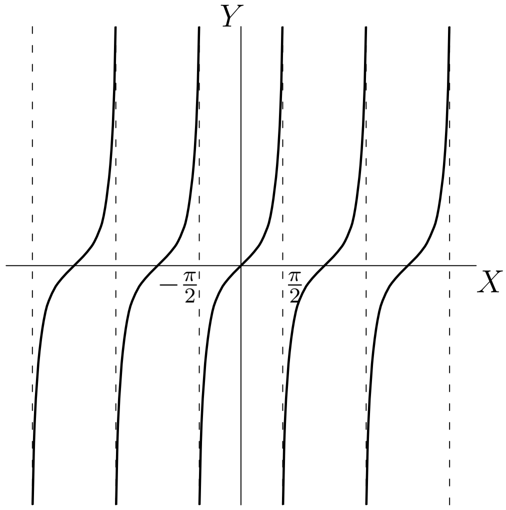
Lembre-se que utilizamos Q_α para representar o ponto de coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Na figura seguinte, os segmentos RQ_α e PS são perpendiculares ao eixo das abscissas. Quando Q_α está no primeiro quadrante,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{RQ_\alpha}{OR} = \frac{PS}{OP} = PS$$

— a terceira igualdade segue pelo Teorema de Tales, pois os triângulos ORQ_α e OPS são semelhantes. Portanto, a ordenada do ponto S é igual a $\operatorname{tg}\alpha$. Não é difícil extender este resultado quando o ponto Q_α está em outro quadrante que não é o primeiro.



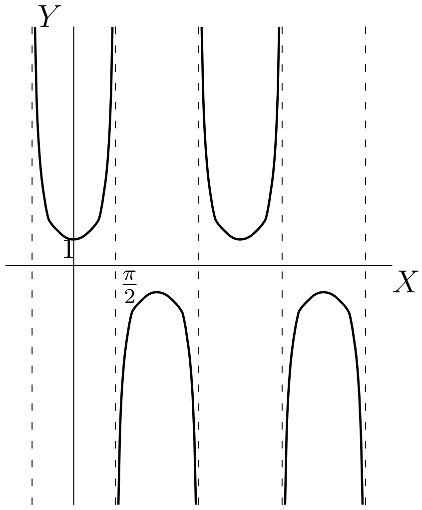
Observando a coordenada do ponto S, quando α percorre o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, concluímos que a função $\operatorname{tg}\alpha$ é crescente neste intervalo. Em particular, o seu período é π. Mais ainda, os valores de $\operatorname{tg}\alpha$ percorrem todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$. O gráfico da função tangente é representado na próxima figura.



Para esta função temos os seguintes limites laterais

$$\lim_{X\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} X = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{X\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} X = +\infty$$

Agora apresentaremos dois períodos do gráfico da função secante, cuja forma pode ser facilmente obtida a partir do gráfico do cosseno.



Note que

$$\lim_{X\to -\frac{\pi}{2}^+} \sec X = \lim_{X\to \frac{\pi}{2}^-} \sec X = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{X\to \frac{\pi}{2}^+} \sec X \lim_{X\to \frac{3\pi}{2}^-} \sec X = -\infty$$

Regra 1. *Se $r(X) = \operatorname{tg} X$, então $r'(X) = \sec^2 X$*

A regra do quociente afirma que

$$r'(X) = \frac{f'(X)g(X) - f(X)g'(X)}{g(X)^2} \quad \text{quando} \quad r(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \tag{3}$$

Neste caso $f(X) = \operatorname{sen} X$ e $g(x) = \cos X$. Como $f'(X) = \cos X$ e $g'(X) = -\operatorname{sen} X$, obtemos que

$$r'(X) = \frac{\cos X \cos X - \operatorname{sen} X(-\operatorname{sen} X)}{\cos^2 X} = \frac{\cos^2 X + \operatorname{sen}^2 X}{\cos^2 X} = \frac{1}{\cos^2 X} = \sec^2 X$$

Exemplo 2. *Encontre a reta normal à curva de equação $Y = \operatorname{tg} X$ no ponto de coordenadas $(\pi, 0)$.*

Como esta curva é o gráfico da função $f(X) = \operatorname{tg} X$, a equação da reta normal no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é

$$Y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(X - a)$$

quando $f'(a) \neq 0$. Pela Regra 1, $f'(a) = \sec^2 a$. Para esta função específica, a equação da reta normal passa a ser

$$Y - \operatorname{tg} a = -\frac{1}{\sec^2 a}(X - a)$$

Quando $a = \pi$, $\operatorname{tg} \pi = 0$ e $\sec \pi = 1$. Portanto, a equação da reta normal à esta curva no ponto de coordenadas $(\pi, 0)$ é $Y - 0 = -(X - \pi)$ que pode ser reescrita como $X + Y - \pi = 0$.

Exercício 3. *Determine o número de retas tangentes à curva de equação* $Y = \operatorname{tg} X$, *cuja abscissa do ponto de tangência pertence ao intervalo* $[0, 100]$, *que são paralelas a reta de equação:*

(i) $X + Y - 256 = 0$
(ii) $X - Y - 256 = 0$
(iii) $Y = 0$

Regra 4. *Se* $r(X) = \sec X$, *então* $r'(X) = \operatorname{tg} X \sec X$

Obtemos $r'(X)$ substituindo, em (3), $f(X)$ e $g(X)$ por respectivamente 1 e $\cos X$. Neste caso $f'(X) = 0, g'(X) = -\operatorname{sen} X$ e daí

$$r'(X) = \frac{0 \cos X - 1(-\operatorname{sen} X)}{\cos^2 X} = \frac{\operatorname{sen} X}{\cos^2 X} = \frac{\operatorname{sen} X}{\cos X}\frac{1}{\cos X} = \operatorname{tg} X \sec X$$

2. As funções cotangente e cossecante

As expressões para as funções cotangente e cossecante são

$$\operatorname{cotg} X = \frac{\cos X}{\operatorname{sen} X}$$
$$\operatorname{cossec} X = \frac{1}{\operatorname{sen} X}$$

Estas expressões não estão definidas para todos os valores de X para os quais $\operatorname{sen} X = 0$. Isto ocorre quando $X = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, as funções cotangente e cossecante possuem o mesmo domínio que é

$$\{X \in \mathbb{R} : X \text{ não é múltiplo inteiro de } \pi\}$$

Dividindo a seguinte identidade fundametal

$$\operatorname{sen}^2 X + \cos^2 X = 1$$

que foi estabelecida na aula antierior, por $\operatorname{sen}^2 X$ obtemos

$$1 + \left(\frac{\cos X}{\operatorname{sen} X}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 X}{\operatorname{sen}^2 X} = \frac{\operatorname{sen}^2 X + \cos^2 X}{\operatorname{sen}^2 X} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 X} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} X}\right)^2$$

Isto é,

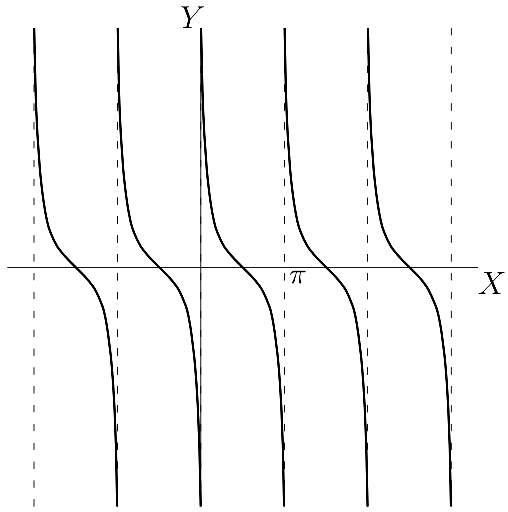
$$\operatorname{cotg}^2 X + 1 = \operatorname{cossec}^2 X \tag{4}$$

Esta identidade será muito utilizada quando lidarmos com estas funções.

Exercício 5. *Decida sobre a veracidade de cada uma das seguintes sentenças:*

(i) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1$ *para todo número real* α *que não é múltiplo inteiro de* $\frac{\pi}{2}$
(ii) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen} 2\alpha = 2$ *para todo número real* α *que não é múltiplo inteiro de* $\frac{\pi}{2}$
(iii) *O período da função cotangente é igual a* 2π
(iv) *O período da função cossecante é igual a* 2π
(v) $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(-\alpha)$
(vi) $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$ *para todos números reais* α *e* β *tais que não existe múltiplo inteiro de* π *igual a* α, β *ou* $\alpha + \beta$
(vii) $\sec(\alpha + \beta) = \sec\alpha \sec\beta - \operatorname{cossec}\alpha \operatorname{cossec}\beta$ *para todos números reais* α *e* β *tais que não existe múltiplo inteiro de* $\frac{\pi}{2}$ *igual a* α, β *ou* $\alpha + \beta$
(viii) *Os valores da cossecante nunca pertencem ao intervalo* $(-1, 1)$

(ix) *O gráfico de* $\operatorname{cossec} X$ *é obtido a partir do gráfico de* $\sec X$ *após uma translação horizontal de* $\frac{\pi}{2}$ *para a direita.*
(x) *O gráfico de* $\operatorname{cotg} X$ *é representado na figura seguinte*



Regra 6. *Se* $r(X) = \operatorname{cotg} X$*, então* $r'(X) = -\operatorname{cossec}^2 X$

Substituindo em (3), que é regra do quociente, $f(x) = \cos X$ e $g(X) = \operatorname{sen} X$, cujas derivadas são $f'(X) = -\operatorname{sen} X$ e $g'(X) = \cos X$, obtemos que

$$r'(X) = \frac{(-\operatorname{sen} X)\operatorname{sen} X - \cos X \cos X}{\operatorname{sen}^2 X} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 X + \cos^2 X)}{\operatorname{sen}^2 X} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 X} = -\operatorname{cossec}^2 X$$

Exercício 7. *Considere a função* $f(X) = 3\operatorname{tg} X - 3\operatorname{cotg} X$

(i) *Calcule* $f'(X)$
(ii) *Encontre uma expressão para* $f'(X)$ *envolvendo apenas a função* $\operatorname{cossec} 2X$
(iii) *Caso existam, determine todas as retas tangentes ao gráfico de* f *que são horozontais.*
(iv) *Ache a equação da reta tangente ao gráfico de* f *no ponto de coordenadas* $\left(\frac{9\pi}{4}, 0\right)$

Regra 8. *Se* $r(X) = \operatorname{cossec} X$*, então* $r'(X) = -\operatorname{cotg} X \operatorname{cossec} X$

Obtemos $r'(X)$ substituindo, em (3), $f(X)$ e $g(X)$ por respectivamente 1 e $\operatorname{sen} X$. Neste caso $f'(X) = 0, g'(X) = \cos X$ e daí

$$r'(X) = \frac{0\operatorname{sen} X - 1\cos X}{\operatorname{sen}^2 X} = \frac{-\cos X}{\operatorname{sen}^2 X} = -\frac{\cos X}{\operatorname{sen} X}\frac{1}{\operatorname{sen} X} = -\operatorname{cotg} X \operatorname{cossec} X$$

3. Respostas dos exercícios

3. (i) 0 (ii) 32 (iii) 0 **5.** (i) V (ii) V (iii) F (é igual a π) (iv) V (v) F (a cotangente é uma função ímpar) (vi) V (vii) F (viii) V (ix) V (x) V **7.** (i) $3\sec^2 X + 3\operatorname{cossec}^2 X$ (ii) $12\operatorname{cossec}^2 2X$ (iii) não existem (iv) $Y = 12X - 27\pi$

Conteúdo da sexta aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos