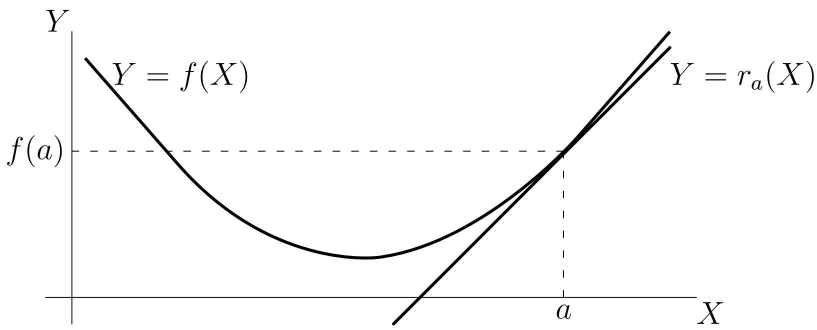
CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA SEGUNDA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, veremos que o sinal da derivada segunda de uma função dá informações sobre a concavidade do gráfico desta função. Definiremos o limite no infinito. Finalizamos a aula esboçando o gráfico de algumas funções racionais.

1. O sinal da derivada segunda

O gráfico de uma função $f(X)$ é dito **côncavo para cima** em um intervalo I quando, para todo a pertencente ao interior de I, o gráfico da função restrita ao intervalo I está acima de sua reta tangente no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ — exceto pelo ponto de coordenadas $(a, f(a))$, que é o de tangência, e que pertence simultaneamente ao gráfico de $f(X)$ e a reta tangente. Veja a figura a seguir.



A reta tangente ao gráfico da função $f(X)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é o gráfico da seguinte função

$$r_a(X) = f(a) + f'(a)(X - a)$$

Portanto, a função é côncava para cima no intervalo I se e somente se, para todo X em I e a no interior de I,

$$f(X) \geq r_a(X)$$

ou seja

$$d_a(X) = f(X) - r_a(X) = f(X) - [f(a) + f'(a)(X - a)] \geq 0 \tag{1}$$

Regra 1. *Seja $f(X)$ uma função contínua para todo X em I. Se $f''(X) > 0$ para todo X no interior de I, então o gráfico de $f(X)$ é côncavo para cima em I.*

Vamos estabelecer que $X = a$ é um ponto de mínimo absoluto para $d_a(X)$. Faremos isto analisando o sinal da derivada de $d_a(X)$. Note que

$$d'_a(X) = f'(X) - f'(a)$$

é negativa para $X < a$ e positiva para $a < X$ porque $f'(X)$ é uma função crescente em I já que sua derivada $f''(X)$ é positiva neste intevalo. Logo $X = a$ é um ponto de mínimo

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

absoluto para $d_a(X)$ no intervalo I. Portanto, para todo X em I,

$$d_a(X) \geq d_a(a) = 0$$

Consequüentemente o gráfico de $f(X)$ é côncavo para cima em I pois (1) é satisfeita.

Para a função quadrática $f(X)$ dada por $f(X) = aX^2 + bX + c$, temos que $f''(X) = 2a$. Quando $a > 0$, pela Regra 1, o gráfico de $f(X)$ é côncavo para cima no intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Isto é, a concavidade do gráfico de uma função quadrática é conseqüência de uma regra muito mais geral e que vale para qualquer função que tenha derivada segunda.

O gráfico de uma função $f(X)$ é dito **côncavo para baixo** em um intervalo I quando, para todo a pertencente ao interior de I, o gráfico da função restrita ao intervalo I está abaixo de sua reta tangente no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ — exceto pelo ponto de coordenadas $(a, f(a))$, que é o de tangência, e que pertence simultaneamente ao gráfico de $f(X)$ e de $r_a(X)$. De maneira análoga podemos estabelecer que:

Regra 2. *Seja $f(X)$ uma função contínua para todo X em I. Se $f''(X) < 0$ para todo X no interior de I, então o gráfico de $f(X)$ é côncavo para baixo em I.*

Exemplo 3. *Analise a convavidade do gráfico da função f dada por*

$$f(X) = \frac{1}{X^2 + 1}$$

Necessitamos da derivada segunda desta função. Utilizaremos a regra do quociente para encontrar a derivada primeira:

$$f'(X) = \frac{0(X^2+1) - 1(2X)}{(X^2+1)^2} = -\frac{2X}{(X^2+1)^2}$$

Não iremos desenvolver o denominador que aprarece na expressão de $f'(X)$ porque, desta forma, ao calcularmos a derivada segunda, podemos facilmente por em evidência no seu numerador o termo $X^2 + 1$, como veremos a seguir. Temos que

$$\begin{aligned} f''(X) &= -\frac{2(X^2+1)^2 - 2X[2(X^2+1)2X]}{(X^2+1)^4} \\ &= -\frac{2(X^2+1)[(X^2+1) - 4X^2]}{(X^2+1)^4} \\ &= -\frac{2(X^2+1)(1-3X^2)}{(X^2+1)^4} \end{aligned}$$

Note que o termo $X^2 + 1$ multiplica o numerador e o denominador da última fração. Ao simplificarmos, chegamos a

$$f''(X) = -\frac{2(1-3X^2)}{(X^2+1)^3} = \frac{2(3X^2-1)}{(X^2+1)^3}$$

Como $X^2 + 1$ é sempre positivo, o sinal do denominador de $f''(X)$, que é $(X^2+1)^3$, é sempre positivo. Portanto, o sinal de $f''(X)$ coincide com o sinal de seu numerador, que é $6X^2 - 2$. Como o numerador é um polinômio quadrático com concavidade voltada para cima, o seu sinal é positivo fora das raízes e negativo entre as raízes. Em resumo,

$$\begin{array}{cccccc} + & & - & & + & \\ \hline \smile & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frown & \sqrt{\frac{1}{3}} & \smile & \text{sinal de } f''(X) \end{array}$$

Conseqüentemente o gráfico de $f(X)$ é

- concavo para cima nos intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ e $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$
- concavo para baixo no intervalo $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

Os pontos $X = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ e $X = \sqrt{\frac{1}{3}}$, nos quais ocorrem a mudança de concavidade no gráfico de $f(X)$, são conhecidos como seus **pontos de inflexão**.

2. Comportamento no infinito

Quando a variável X vai ficando muito grande, diremos que X **tende a mais infinito**, e denotamos este comportamento por $X \to +\infty$. O comportamento da função $f(X)$ pode ser variado.

Pode ocorrer que os valores de $f(X)$ fiquem muito grandes, ultrapassando qualquer número real escolhido. Neste caso diremos que $f(X)$ **tende a mais infinito**. Denotamos isto por

$$\lim_{X \to +\infty} f(X) = +\infty$$

Por exemplo, isto ocorre com X^a, para todo número real positivo a. (Lembre-se que X^a, por definição, é igual a $e^{a \ln X}$.) Isto é,

$$\lim_{X \to +\infty} X^a = +\infty \quad \text{quando } a > 0$$

Pode ocorrer que os valores de $f(X)$ fiquem muito pequenos, menores que qualquer número real escolhido. Neste caso diremos que $f(X)$ **tende a menos infinito**. Denotamos isto por

$$\lim_{X \to +\infty} f(X) = -\infty$$

Por exemplo,

$$\lim_{X \to +\infty} -X^5 = -\infty$$

Neste caso,

$$\lim_{X \to +\infty} -f(X) = +\infty$$

Pode ocorrer que os valores de $f(X)$ se aproximem de um valor fixo L. Neste caso, diremos que o $f(X)$ tende a L e denotamos isto por

$$\lim_{X \to +\infty} f(X) = L$$

Por exemplo,

$$\lim_{X \to +\infty} X^a = 0 \quad \text{quando } a < 0$$

Este limite é 0 porque

$$\lim_{X\to+\infty} X^a = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^{-a}}$$

e o limite da direita é do "tipo $\frac{1}{\infty}$" que vale 0.

Quando não ocorre nenhuma das três situações descritas anteriormente diremos que

$$\lim_{X\to+\infty} f(X)$$

não existe. Por exemplo, é o caso da função $f(X) = \cos X$.

De maneira análoga definimos o

$$\lim_{X\to-\infty} f(X)$$

Alternativamente, podemos definir este limite utilizando a seguinte relação:

$$\lim_{X\to-\infty} f(X) = \lim_{X\to+\infty} f(-X)$$

Vamos calcular alguns exemplos. Abusaremos um pouco da notação e trataremos $+\infty$ e $-\infty$ como números. Usamos ∞ para representar indistintamente $-\infty$ ou $+\infty$. Limites do tipo

$$+\infty - \infty \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

são indeterminações.

Exemplo 4. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to+\infty} X^3 - 5X^2 - 4X + 9$$

Este limite é do tipo $+\infty - \infty - \infty + 9$. É uma indeterminação. É um erro cancelar o $+\infty$ com um dos $-\infty$ e concluir que este limite é $-\infty$. Veremos a seguir que será igual a $+\infty$. Podemos calcular este limite usando uma técnica que permite calcular o limite de qualquer função que seja a soma de múltiplos de potências de X — em particular de qualquer função polinomial. Colocamos a maior potência de X em evidência:

$$\lim_{X\to+\infty} X^3 - 5X^2 - 4X + 9 = \lim_{X\to+\infty} X^3 \left(1 - \frac{5}{X} - \frac{4}{X^2} + \frac{9}{X^3}\right)$$

Usando o fato de que o limite do produto é o produto dos limites, temos que

$$\lim_{X\to+\infty} X^3 - 5X^2 - 4X + 9 = \lim_{X\to+\infty} X^3 \lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{X} - \frac{4}{X^2} + \frac{9}{X^3}\right) \tag{2}$$

Vamos calcular separadamente o limite que esta mais à direita da equação (2). Usamos que o limite da soma é a soma dos limites e o limite da diferença é a diferença dos limites.

$$\lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{X} - \frac{4}{X^2} + \frac{9}{X^3}\right) = \lim_{X\to+\infty} 1 - \lim_{X\to+\infty} \frac{5}{X} - \lim_{X\to+\infty} \frac{4}{X^2} + \lim_{X\to+\infty} \frac{9}{X^3}$$

Como

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{5}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{4}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{9}{X^3} = 0$$

temos que

$$\lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{X} - \frac{4}{X^2} + \frac{9}{X^3}\right) = 1 - 0 - 0 + 0 = 1$$

Substituindo este valor em (2), obtemos que

$$\lim_{X\to+\infty} X^3 - 5X^2 - 4X + 9 = \lim_{X\to+\infty} X^3 = +\infty$$

Utilizando um argumento similar ao do exemplo anterior, podemos concluir que o limite de qualquer função polinomial quando a variável tende a ∞ é igual a ∞. Em geral, uma soma de múltiplos de potências de X é dominada pelo múltiplo da potência de maior expoente, quando X tende a ∞.

Exemplo 5. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{2X^2 - 5X + 9}{5X + 1}$$

Vamos colocar em evidência a maior potência de X do numerador, que é X^2, e do denominador, que é X. Portanto,

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{2X^2 - 5X + 9}{5X + 1} = \lim_{X\to-\infty} \frac{X^2\left(2 - \frac{5}{X} + \frac{9}{X^2}\right)}{X\left(5 + \frac{1}{X}\right)}$$

Como

$$\lim_{X\to-\infty} \left(2 - \frac{5}{X} + \frac{9}{X^2}\right) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{X\to-\infty} \left(5 + \frac{1}{X}\right) = 5$$

temos que

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{2X^2 - 5X + 9}{5X + 1} = \lim_{X\to-\infty} \frac{2X^2}{5X} = \lim_{X\to-\infty} \frac{2X}{5} = -\infty$$

Exercício 6. *Calcule os seguintes limites:*

(i)

$$\lim_{X\to-\infty} X^5 + 3X^4 - 2X^2 + 12$$

(ii)

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{3X^2 + 5}{4X^2 - 7X + 2}$$

(iii)

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{5X^3 + 12X^2 + 14X + 5}{2X^4 + 1}$$

(iv)

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{2X^3 - 2X^2 + X - 3}{X^2 + 3}$$

3. Esboço de gráficos

Nesta seção faremos o esboço dos gráficos de algumas funções racionais, já que desenvolvemos as ferramentas necessárias para realizar esta tarefa.

Exemplo 7. *Considere a função dada por*

$$f(X) = \frac{X}{X^2 + 1}$$

(i) *Determine os intervalos de crescimento de decrescimento de f.*
(ii) *Estude a concavidade do gráfico de f.*
(iii) *Encontre a assíntota horizontal ao gráfico de f.*

(iv) *Esboce o gráfico de f.*
(v) *Qual o valor máximo e o mínimo assumido por f?*

(i) O sinal da derivada primeira de $f(X)$ nos informa sobre o crescimento de $f(X)$. Temos que:

$$f'(X) = \frac{1(X^2+1) - X(2X)}{(X^2+1)^2} = \frac{1-X^2}{(X^2+1)^2}$$

O denominador de $f'(X)$ é sempre positivo. Portanto, o sinal de $f'(X)$ coincide com o sinal do seu numerador. Como o numerador de $f'(X)$ é uma função quadrática, com convavidade voltada para baixo, o seu sinal é negativo fora das raízes e positivos entre as raízes, que são -1 e 1. O sinal de $f'(X)$ é:

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline \searrow & -1 & \nearrow & 1 & \searrow \end{array} \quad \text{sinal de } f'(X)$$

Logo $f(X)$ é decrescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$ e crescente no intervalo $[-1, 1]$. Note que $X = -1$ é um ponto de mínimo local de $f(X)$ e $X = 1$ de máximo local.

(ii) A concavidade do gráfico de $f(X)$ é determinada a partir da análise do sinal da derivada segunda de $f(X)$. Temos que:

$$\begin{aligned} f''(X) &= \frac{-2X(X^2+1)^2 - (1-X^2)2(X^2+1)2X}{(X^2+1)^4} \\ &= \frac{-2X(X^2+1)[(X^2+1) + 2(1-X^2)]}{(X^2+1)^4} \\ &= -\frac{2X(3-X^2)}{(X^2+1)^3} \\ &= \frac{2X(X^2-3)}{(X^2+1)^3} \\ &= \frac{2X(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{3})}{(X^2+1)^3} \end{aligned}$$

Como $\frac{2}{(X^2+1)^3}$ é sempre positivo, o sinal de $f''(X)$ coincide com o sinal de $X(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{3})$. Portanto, como $X(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{3})$ é o produto de três funções afins diferentes da forma $X - a$, o seu sinal muda na passagem por cada uma das raízes destas funções afins, que são: $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. Logo seu sinal é:

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline \frown & -\sqrt{3} & \smile & 0 & \frown & \sqrt{3} & \smile \end{array} \quad \text{sinal de } f''(X)$$

Conseqüentemente o gráfico de $f(X)$ é côncavo para cima nos intervalos $[-\sqrt{3}, 0]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$ e para baixo nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[0, \sqrt{3}]$. Note que $X = -\sqrt{3}$, $X = 0$ e $X = \sqrt{3}$ são pontos de infexão do gráfico de $f(X)$.

(iii) Observe que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{X^2+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{X^2\left(1+\frac{1}{X}\right)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$$

De maneira similar, concluímos que

$$\lim_{X \to -\infty} \frac{X}{X^2+1} = 0$$

Portanto, o gráfico de $f(X)$ fica muito próximo da reta $Y = 0$ quando X fica muito grande ou muito pequeno. Neste caso, diremos que $Y = 0$ é uma **assíntota horizontal** para o gráfico de f.

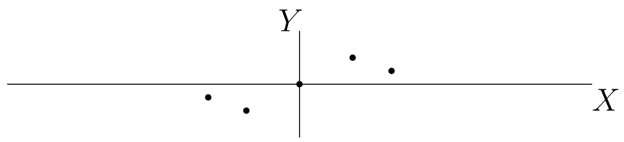
(iv) As seguintes informações serão úteis no esboço deste gráfico:

- A função $f(X)$ é ímpar porque

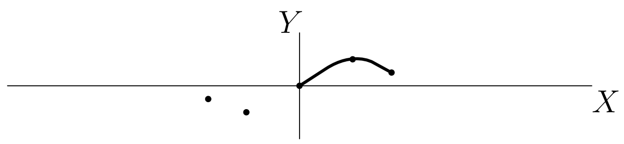
$$f(-X) = \frac{-X}{(-X)^2+1} = -\frac{X}{X^2+1} = -f(X)$$

- A função $f(X)$ possui apenas $X = 0$ como raiz.
- A função $f(X)$ está definida para todo X real.
- A função $f(X)$ é positiva quando $X > 0$ e negativa quando $X < 0$.

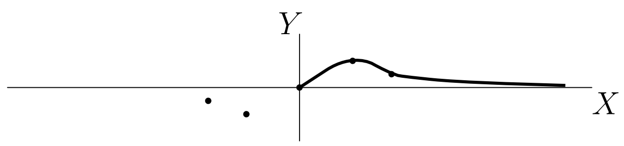
Faremos este gráfico por etapas. Primeiro assinalamos os pontos de máximos e mínimos locais e os de inflexão.



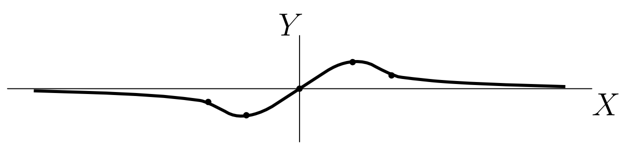
Esboçaremos o gráfico por partes. Como a função é ímpar, faremos inicialmente o gráfico para X não-negativo. Consideraremos primeiro a parte do gráfico quando X percorre o intervalo $\left[0, \sqrt{3}\right]$, no qual a função é côncava para baixo. A função cresce até $X = 1$ e a partir deste valor decresce. O gráfico desta parte é:



Concluímos o gráfico para X não-negativo, observado que a função tem um ponto de inflexão em $X = \sqrt{3}$ e a partir deste valor fica côncava para cima. Mais ainda, continua decrescendo e tende a 0, mas é sempre positiva. Portanto, o gráfico desta função para X não-negativo é:



Como esta função é ímpar, o seu gráfico é simétrico com relação à origem:



(v) Pelo esboço do gráfico de $f(X)$, notamos que os pontos $X = 1$ e $X = -1$ são respectivamente de máximo e mínimo absolutos para $f(X)$. O máximo absoluto de $f(X)$ é $\frac{1}{2}$ e o mínimo é $-\frac{1}{2}$.

Exemplo 8. *Considere a função dada por*

$$f(X) = \frac{X^2}{X^2 - 1}$$

e definida para $X \neq \pm 1$.

(i) *Determine os intervalos de crescimento de decrescimento de f.*
(ii) *Estude a concavidade do gráfico de f.*
(iii) *Encontre a assíntota horizontal ao gráfico de f.*
(iv) *Determine as assíntotas verticas ao gráfico de f.*
(v) *Esboce o gráfico de f.*

(i) O sinal da primeira derivada de $f(X)$ nos dá a informação sobre o crescimento e decrescimento de $f(X)$. Temos que

$$f'(X) = \frac{2X(X^2 - 1) - X^2(2X)}{(X^2 - 1)^2} = -\frac{2X}{(X^2 - 1)^2}$$

Como o denominador de $f'(X)$ é sempre positivo, o sinal de $f'(X)$ é o mesmo de $-2X$: positivo para X negativo e negativo para X positivo.

$+$		$+$		$-$		$-$	sinal de $f'(X)$
$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	

Portanto, a função $f(X)$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0]$ e decrescente nos intervalos $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Observe que $X = 0$ é um ponto de máximo local.

(ii) Para determinarmos a concavidade do gráfico de $f(X)$, necessitamos analisar o sinal de $f''(X)$. Observe que

$$\begin{aligned} f''(X) &= -\frac{2(X^2-1)^2 - 2X[2(X^2-1)2X]}{(X^2-1)^4} \\ &= -\frac{2(X^2-1)[(X^2-1) - 4X^2]}{(X^2-1)^4} \\ &= \frac{2(X^2-1)(3X^2+1)}{(X^2-1)^4} \end{aligned}$$

Como $\frac{2(3X^2+1)}{(X^2-1)^4}$ é sempre positivo, o sinal de $f''(X)$ coincide com o de $X^2 - 1$, que é uma função quadrática com convavidade voltada para cima: positivo fora das raízes, que são -1 e 1, e negativo entre as raízes.

$+$		$-$		$+$	sinal de $f''(X)$
$\smile$	-1	$\frown$	1	$\smile$	

O gráfico da função é côncavo para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ e côncavo para baixo no intervalo $(-1, 1)$. Note que a função não possui pontos de inflexão.

(iii) Para determinarmos a assíntota horizontal ao gráfico de $f(X)$, necessitamos analisar o comportamento desta função no infinito. Temos uma outra expressão para $f(X)$ que é:

$$f(X) = 1 + \frac{1}{X^2 - 1} \tag{3}$$

Logo

$$\lim_{X \to +\infty} f(X) = \lim_{X \to -\infty} f(X) = 1$$

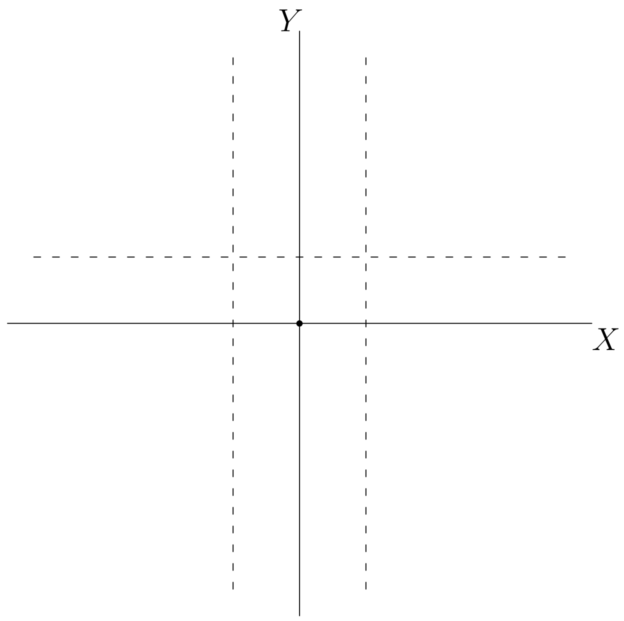
e daí $Y = 1$ é a assíntota horizontal ao gráfico de $f(X)$. Por (3), temos que o gráfico de $f(X)$ está acima desta assíntota quando $\frac{1}{X^2-1}$ for positivo, ou seja, quando $X < -1$ ou $X > 1$, e abaixo desta assíntota quando $-1 < X < 1$.

(iv) Uma reta de equação $X = a$ é uma **assíntota vertical** para o gráfico de $f(X)$ quando os valores de $f(X)$ tendem a ∞ quando X tende a a pela direita ou pela esquerda. Neste caso as assíntotas verticais são as retas $X = -1$ e $X = 1$. Note que -1 e 1 são as raízes do denominador. Observe que o gráfico de $f(X)$ fica cada vez mais próximo das assíntotas verticais quando percorremos qualquer uma destas retas na direção do infinito.

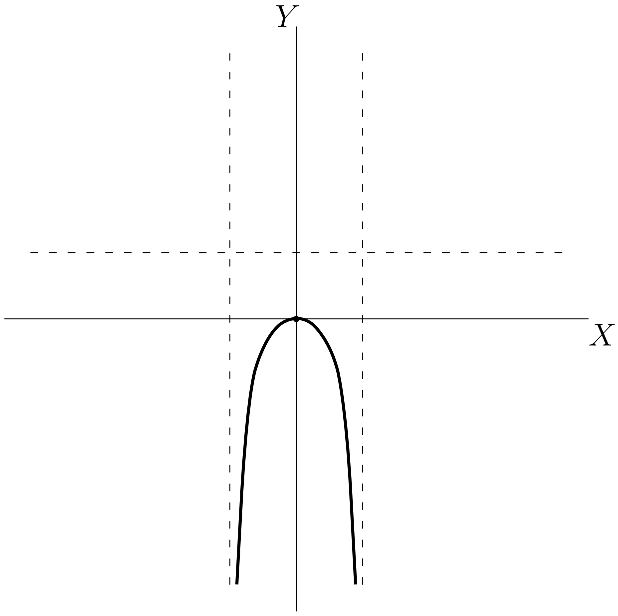
(v) As seguintes informações serão úties no esboço deste gráfico:

- A função $f(X)$ é par, isto é, $f(X) = f(-X)$ para todo X em seu domínio. Logo o gráfico é simétrico com respeito ao eixo das ordenadas.
- A função $f(X)$ possui uma única raiz que é $X = 0$.

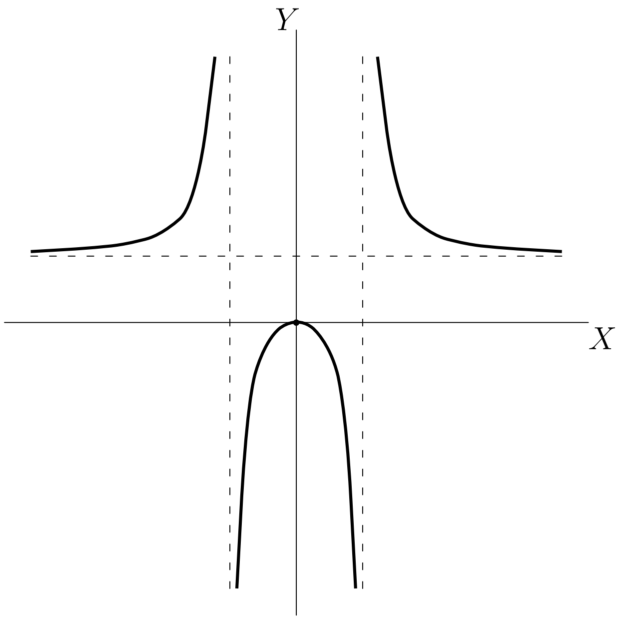
Iniciamos o esboço do gráfico traçando as assíntotas e assinalando os pontos notáveis do gráfico (apenas um, que é de máximo local):



Depois esboçamos o gráfico de $f(X)$ para X no intervalo $(-1, 1)$. Neste intervalo, o gráfico de $f(X)$ é côncavo para baixo, crescente até $X = 0$ e decrescente a partir deste valor. Mais ainda, é simétrico com respeito ao eixo das abscissas.



O próximo passo é esboçar o gráfico de $f(X)$ para X no intervalo $(1, +\infty)$. Neste intervalo, a função é sempre decrescente e côncava para cima. Mais ainda, está sempre acima da assíntota horizontal. Usando a simetria com respeito ao eixo das ordenadas, já que $f(X)$ é uma função par, obtemos simultaneamente o gráfico de $f(X)$ no intervalo $(-\infty, -1)$.



Exemplo 9. *Considere a função dada por*

$$f(X) = \frac{X^2}{X - 1}$$

e definida para $X \neq \pm 1$.

(i) *Determine os intervalos de crescimento de decrescimento de f.*
(ii) *Estude a concavidade do gráfico de f.*

(iii) *Encontre a assíntota inclinada ao gráfico de f.*
(iv) *Determine as assíntotas verticas ao gráfico de f.*
(v) *Esboce o gráfico de f.*

(i) Iniciamos dividindo X^2 por $X-1$. Obtemos como quociente $X+1$ e como resto 1. Portanto,

$$f(X) = X + 1 + \frac{1}{X-1} \tag{4}$$

Derivando esta expressão, temos que

$$f'(X) = 1 - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{(X-1)^2 - 1}{(X-1)^2} = \frac{X^2 - 2X}{(X-1)^2} \tag{5}$$

Os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(X)$ são determinados a partir do sinal de $f'(X)$. Como $(X-1)^2$ é sempre positivo, o sinal de $f'(X)$ coincide com o da função quadrática $X^2 - X$ que é positivo fora das raízes e negativo entre as raízes. Portanto,

$$\begin{array}{ccccccccl} & + & & - & & - & & + & \\ \hline & \nearrow & 0 & \searrow & 1 & \searrow & 2 & \nearrow & \text{sinal de } f'(X) \end{array}$$

Logo $f(X)$ é crescente nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[2, +\infty)$ e decrescente nos intervalos $[0, 1)$ e $(1, 2]$. Mais ainda, $X = 0$ é um ponto de máximo local de $f(X)$ e $X = 2$ é um ponto de mínimo local.

(ii) A derivada segunda de f pode ser facilmente calculada a partir de (5):

$$f''(X) = \frac{2(X-1)}{(X-1)^4}$$

Como $(X-1)^4$ é sempre positivo, temos que o sinal de $f''(X)$ coincide com o de $X - 1$. Logo

$$\begin{array}{ccccl} & - & & + & \\ \hline & \frown & 1 & \smile & \text{sinal de } f''(X) \end{array}$$

Logo o gráfico de $f(X)$ é côncavo para baixo quando X está no intervalo $(-\infty, 1)$ e côncavo para cima em $(1, +\infty)$. Note que este gráfico não possui pontos de inflexão.

(iii) Por (4), note que o gráfico de $f(X)$ fica muito próximo da reta $Y = X + 1$ quando X fica muito grande (X tende a $+\infty$) ou muito pequeno (X tende a $-\infty$). Logo $Y = X + 1$ é uma assíntota inclinada para o gráfico de $f(X)$.

(iv) A única assíntota vertical tem equação $X = 1$ porque $X = 1$ é a única raiz do denominador de $f(X)$.

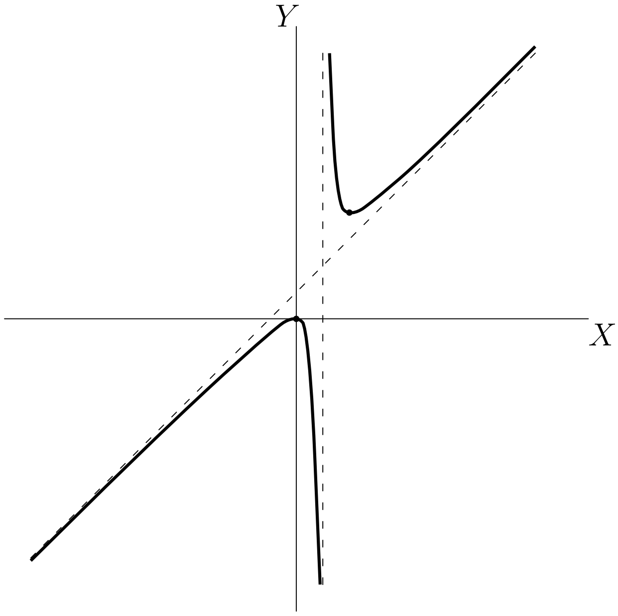
(v) Esta função não é par ou ímpar. Mais ainda, não possui raízes reais. O gráfico desta função é a curva de equação

$$Y = \frac{X^2}{X-1}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$XY - X^2 - Y = 0$$

Portanto, o gráfico desta função é uma cônica. Mais precisamente, é uma hipérbole. Não faremos este gráfico por etapas. Encorajamos o leitor a fazer isto.



4. Conclusão

Acabamos de considerar o esboço dos gráficos de três funções racionais, isto é, de funções que são o quociente de duas funções polinomiais. Para polinômios $a(X)$ e $b(X)$, que não possuem fatores em comum, com $b(X) \not\equiv 0$, considere a seguinte função

$$f(X) = \frac{a(X)}{b(X)}$$

Não fazem parte do maior domínio de definição de $f(X)$ apenas as raízes de $b(X)$, isto é, todos os X que satisfazem $b(X) = 0$. Quando t é uma raiz de $b(X)$, como $a(t) \neq 0$, já que $a(X)$ e $b(X)$ não possuem fator em comum, os valores de $f(X)$ tedem a ∞ quando X tende a t, pela direita ou pela esquerda. Portanto, $X = t$ é uma assíntota vertical para o gráfico de $f(X)$. Além das assíntotas verticais, o gráfico de $f(X)$ poderá ter uma outra assíntota que será inclinada ou horizontal. Agora, descreveremos como obter esta assíntota, caso exista. Ao dividirmos $a(X)$ por $b(X)$ obtemos um quociente $q(X)$ e um resto $r(X)$ que satisfazem

$$a(X) = q(X)b(X) + r(X)$$

e o grau de $r(X)$ é menor que o grau de $b(X)$. Conseqüentemente

$$f(X) = q(X) + \frac{r(X)}{b(X)} \tag{6}$$

Como o grau de $r(X)$ é menor que o grau de $b(X)$, temos que

$$\lim_{X\to\infty} \frac{r(X)}{b(X)} = 0$$

Portanto, o gráfico de $f(X)$, que é a curva $Y = f(X)$, fica muito próximo da curva $Y = q(X)$ quando X fica muito grande ou muito pequeno, isto é, X tende a ∞. Temos as seguintes possibilidades:

- O grau de $q(X)$ é pelo menos 2. As únicas assíntotas ao gráfico de $f(X)$ são verticais, caso existam. Isto ocorre quando o grau de $a(X)$ é igual ao de $b(X)$ somado de pelo menos 2.
- O grau de $q(X)$ é igual a 1. Neste caso $Y = q(X)$ é uma assíntota inclinada do gráfico de $f(X)$. Isto ocorre quando o grau de $a(X)$ é igual ao de $b(X)$ somado de 1.
- O grau de $q(X)$ é igual a 0. Neste caso $q(X)$ é uma constante c não nula e $Y = c$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(X)$. Isto ocorre quando o grau de $b(X)$ é igual ao grau de $a(X)$.
- O grau de $q(X)$ é igual a $-\infty$. Neste caso $q(X)$ é o polinômio nulo e a reta $Y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(X)$. Isto ocorre quando o grau de $b(X)$ é maior que o grau de $a(X)$.

Para cada uma das três últimas possibilidades descritas, esboçamos o gráfico de uma função que a satisfaz, na seção anterior.

Quando o gráfico da função racional $f(X)$ possui uma assíntota que não é vertical, a equação (6) nos informa quando este gráfico fica acima ou abaixo desta assíntota, que é a reta de equação $Y = q(X)$. Para tanto, é suficiente analisar o sinal do quociente

$$\frac{r(X)}{b(X)}$$

Quando for positivo, o gráfico de $f(X)$ fica acima da assíntota e, quando for negativo, o gráfico de $f(X)$ fica abaixo da assíntota.

Exercício 10. *Resolva todos os exercícios sobre o esboço de gráficos de funções racionais que foram propostos na segunda lista de exercícios. Vocês já possuem todas as ferramentas para abordarem estes problemas. Para as outras funções, necessitamos desenvolver mais ferramentas. Faremos isto parcialmente na próxima seção.*

5. Respostas dos exercícios

6. (i) $-\infty$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) 0 (iv) $+\infty$

Conteúdo da décima segunda aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos